

第十三章 風險債券、風險債券選擇權與有違約風險的選擇權之評價：結構模型

本章介紹有違約風險(default risk)的債券，簡稱風險債券(risky bonds)，與有違約風險的選擇權，簡稱脆弱的選擇權(Vulnerable Options)之評價。這裡的違約風險是指，債券或選擇權的發行機構無法償還應盡的債務而導致債券投資人或選擇權買方財務的損失。此有別於第五章所介紹的無倒帳風險的債券，其通常為政府機構所發行，才可能無倒帳之慮。這一章同時考慮利率與信用風險對債券價值的影響，可說是延伸第五章的課題。另外，前面所介紹的選擇權評價模型，皆假設無違約風險。因此，本章也是先前選擇權評價模型的延伸。違約風險模型有兩大類：結構模型(structural models)與強度模型(intensity models)。本章是介紹結構模型。第一節介紹風險債券與次順位債券(subordinated bonds)的評價。這些架構分別由 Merton (1974)與 Black and Cox (1976)所提出。第二節以 Klein (1996)的架構介紹有違約風險的歐式股票選擇權之評價。第三節在 Heath, Jarrow and Morton (1992)與 Klein (1996)的架構下介紹有違約風險的歐式債券選擇權之評價。最後一節介紹以風險債券為標的資產的無違約風險之選擇權評價。

第一節 風險債券與次順位債券的評價

首先，是在固定利率的情況下。假設某一公司目前的價值為 V_t ，而此價值的演變服從幾何布朗運動，亦即，

$$dV_t = \mu_V V_t dt + \sigma_V V_t dw_t$$

且該公司僅發行一檔面額 K 到期日 T 的零息債券。此為該公司惟一的負債。這個負債即是本節欲評價的風險債券。在有限責任下，到期時股東權益的價值 E_T 為

$$\text{Max}(V_T - K, 0)$$

亦即，當公司在債券到期時的價值 V_T 若大於債券面額，則其正的差額為當時的股東權益的價值，公司得繼續經營；但若公司在債券到期時的價值 V_T 小於債券面額，則公司會由債權人接管，此時公司價值為債權人所有，債權人無法拿回全額的面值。此即，所謂的信用風險。在以上的架構與 Black and Scholes 的模型下可得出，股東權益目前的價值 E_t 實無異於以公司價值為標的資產到期日 T 履約價格 K 的歐式買權。因此，該風險債券目前的價值 D_t 為

$$V_t - E_t = Ke^{-r(T-t)} - P_t$$

其中， P_t 是以公司價值為標的資產到期日 T 履約價格 K 的歐式賣權。上式等式成立是運用買賣權等價關係(Put-Call Parity)，並可解讀為風險債券的價值為無風險債券的價值減去以發行公司價值為標的資產的歐式賣權。由於歐式賣權價值不小於 0，所以風險債券的價值不高於無風險債券的價值。當發行公司從事的投資風險愈大，公司價值的波動幅度也愈大，賣權價值會愈高，因此，風險債券的價值會愈低。此代表投資風險愈大，信用風險增加，則給予債權人的風險貼水也較高。

由 Black-Scholes 公式可知，風險債券的價值

$$D_t = Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) + V_t\Phi(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(V_t / K) + (r + \sigma_v^2 / 2)(T - t)}{\sigma_v \sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_v \sqrt{T - t}$$

以上為負債到期為一固定值的評價。若負債也服從幾何布朗運動，則此時評價的問題與第十二章交換選擇權的評價相同。

公司所發行的公司債依償債的優先次序可分為資深債券(senior bonds)與次順位債券。假設前述公司的負債為一檔面額 K 到期日 T 的零息資深債券及一檔面額 L 到期日 T 的零息次順位債券，則到期時，債權人與股東的報償如下表所示：

表 13.1：資深債券、次順位債券與權益報償

	$V_t > K + L$	$K < V_t < K + L$	$V_t < K$
資深債券	K	K	V_t
次順位債券	L	$V_t - K$	0
權益	$V_t - (K + L)$	0	0

由上表知資深債券到期的報償為

$$D_T^S = \text{Min}(V_T, K) = V_T + \text{Min}(0, K - V_T) = V_T - \text{Max}(V_T - K, 0)$$

此到期報償實無異於上述的風險債券。因此，上述風險債券的評價公式亦適用於這裡的資深債券。而權益的到期的報償為

$$E_T = \text{Max}(V_T - (K + L), 0)$$

此可視為以公司價值為標的資產到期日 T 履約價格 $K+L$ 的歐式買權。假設次順位債券到期的報償為 D_T^J ，則因

$$V_T = D_T^S + D_T^J + E_T$$

所以，

$$D_t^J = V_t - D_t^S - E_t$$

代入對映的公式整理後可得次順位債券的評價公式：

$$D_t^J = V_t[\Phi(d_{1_K}) - \Phi(d_{1_{K+L}})] - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_{2_K}) + (K + L)e^{-r(T-t)}\Phi(d_{2_{K+L}})$$

$$d_{1_K} = \frac{\ln(V_t / K) + (r + \sigma_v^2 / 2)(T - t)}{\sigma_v \sqrt{T - t}}$$

$$d_{2_K} = d_{1_K} - \sigma_v \sqrt{T - t}$$

$$d1_{K+L} = \frac{\ln(V_t / (K + L)) + (r + \sigma_V^2 / 2)(T - t)}{\sigma_V \sqrt{T - t}}$$

$$d2_{K+L} = d1_{K+L} - \sigma_V \sqrt{T - t}$$

至於隨機利率下風險債券與次順位債券(subordinated bonds)的評價，只要將上面 Black-Scholes 公式改為第十二章中隨機利率下歐式股票選擇權的評價公式即可。

第二節 有違約風險的歐式股票選擇權之評價

本節以 Klein (1996)的架構介紹有違約風險的歐式股票選擇權之評價。有違約風險的選擇權在文獻上也稱為脆弱的選擇權(Vulnerable Options)。這種選擇權有可能發生選擇權的發行者(Writer)或賣方(Seller)無法履行其義務的情況。就在交易所交易的選擇權而言，因有保證金與結算的制度，違約發生的機會可說微乎其微，所以違約風險其實可以忽略。然而，在店頭市場交易的選擇權，若無類似的制度且選擇權的發行者亦無適當的避險，則違約風險可能存在。以到期日 T 履約價格 K 的歐式股票買權為例，到期時若標的股票價格 S_T 大於履約價格 K ，則買權賣方有義務支付 $S_T - K$ 給買方。若有違約發生，假設回收率(Recovery rate)為 $\delta(0 \leq \delta < 1)$ ，則此時買方報償為 $\delta(S_T - K)$ ，而非 $S_T - K$ 。

因此，根據風險中立評價法，有違約風險的歐式股票買權的評價方程式為

$$VC_t = e^{-r(T-t)} E_Q [Max(S_T - K)1_{\{no-default\}} + \delta Max(S_T - K)1_{\{default\}}]$$

其中 VC_t 表示此脆弱的買權目前的價值； $1_{\{\cdot\}}$ 表示指標函數，當 $\{\cdot\}$ 中條件成立其值為 1，否則為 0。所以，欲評價此買權，必須設定違約的條件與回收率。在公司價值模型下，假設買權的發行者為一個公司，當買權到期時若公司資產價值(或公司價值)小於公司負債，即是違約條件成立。而公司價值與買權標的股票價格分別以下的服從幾何布朗運動：

$$dV_t = \mu_V V_t dt + \sigma_V V_t dw_t^V$$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dw_t$$

$$dw_t^V dw_t = \rho dt$$

底下分兩個情況來討論。

情況一：公司負債固定與固定的回收率

此情況假設買權到期時公司的負債為固定的值 D ，且回收率是固定。因此，有違約風險的歐式股票買權的評價方程式為

$$VC_t = e^{-r(T-t)} E_Q[\text{Max}(S_T - K)1_{\{V_T \geq D\}} + \delta \text{Max}(S_T - K)1_{\{V_T < D\}}]$$

代入相關機率密度函數積分整理後可得

$$VC_t = S_t [N(d1, d1_v; \rho) + \delta N(d1, -d1_v; -\rho)] - Ke^{-r(T-t)} [N(d2, d2_v; \rho) + \delta N(d2, -d2_v; -\rho)]$$

$$d1 = \frac{\ln(S_t / K) + (r + \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

$$d2 = d1 - \sigma \sqrt{T - t}$$

$$d1_v = \frac{\ln(V_t / D) + (r - \sigma_v^2 / 2 + \rho \sigma \sigma_v)(T - t)}{\sigma_v \sqrt{T - t}}$$

$$d2_v = d1_v - \rho \sigma \sqrt{T - t}$$

以上有違約風險的歐式股票買權的評價公式在回收率 $\delta = 1$ 時會簡化為 Black-Scholes 公式。因為， $\delta = 1$ 表示無違約風險。其簡化過程須應用下列等式：

$$\Phi(x) = N(x, y; \rho) - N(x, -y; -\rho)$$

情況二：公司負債固定與回收率為到期公司價值除以公司負債

此情況下， $\delta = V_T / D$ 。因此，有違約風險的歐式股票買權的評價方程式為

$$VC_t = e^{-r(T-t)} E_Q[\text{Max}(S_T - K)1_{\{V_T \geq D\}} + \frac{V_T}{D} \text{Max}(S_T - K)1_{\{V_T < D\}}]$$

代入相關機率密度函數積分整理後可得

$$VC_t = S_t N(d1, d1_v; \rho) - Ke^{-r(T-t)} N(d2, d2_v; \rho) + \frac{V_t}{D} [e^{(r + \rho \sigma \sigma_v)(T-t)} S_t N(d1 + \rho \sigma_v \sqrt{T - t}, -d1_v - \rho \sigma \sqrt{T - t}; -\rho) - KN(c1, -c2; -\rho)]$$

$$d1 = \frac{\ln(S_t / K) + (r + \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

$$d2 = d1 - \sigma \sqrt{T - t}$$

$$d1_v = \frac{\ln(V_t / D) + (r - \sigma_v^2 / 2 + \rho \sigma \sigma_v)(T - t)}{\sigma_v \sqrt{T - t}}$$

$$d2_v = d1_v - \rho \sigma \sqrt{T - t}$$

$$c1 = d1 + (\rho \sigma_v + \sigma) \sqrt{T - t}$$

$$c2 = d1_v - (\rho \sigma + \sigma_v) \sqrt{T - t}$$

以上情況二的模型在 $\sigma = 0$ ，亦即標的股價的變化不含韋納過程時，且 $D = S_t e^{r(T-t)} - K$ 時，為變成 Merton(1974)的風險債券評價模型。

第三節 有違約風險的歐式債券選擇權之評價

這一節是以第八章所述的 Heath, Jarrow and Morton (1992)無套利模型的利率模型架構為基礎，探討有違約風險履約價格 K 的歐式債券選擇權之評價。這裡的違約風險模型也採上一節中的 Klein (1996)的設計。而歐式債券選擇權的標的資產為無違約風險的零息債券。

在風險中立下，根據 Heath, Jarrow and Morton (1992)， T 時到期無違約風險零息債券的風險中立過程服從

$$dB(t,T) = r_t B(t,T)dt + \sigma_T B(t,T)d\tilde{w}_t$$

同樣的，在風險中立下，公司價值服從幾何布朗運動：

$$dV_t = r_t V_t dt + \sigma_V V_t d\tilde{w}_t^V$$

$$d\tilde{w}_t^V d\tilde{w}_t = \rho dt$$

同前一節，以下分兩個情況來討論。

情況一：公司負債固定與固定的回收率

此情況假設買權到期時公司的負債為固定的值 D ，且回收率是固定。根據遠期測度法，以 S 時到期的零息債券為標的資產，有違約風險 T 時到期歐式債券買權的評價方程式為

$$VBC_t = B(t,T)E_B \{ [Max(B(t,S) - K)1_{\{V_t \geq D\}} + \delta Max(B(t,S) - K)1_{\{V_t < D\}}] / B(T,T) \}$$

在 σ_T 為 t 與 T 的函數下，則債券價格服從常態分配，代入相關機率密度函數積分整理後可得

$$VC_t = B(t,S)[N(d1, d1_V; \rho) + \delta N(d1, -d1_V; -\rho)] - KB(t,T)[N(d2, d2_V; \rho) + \delta N(d2, -d2_V; -\rho)]$$

$$d1 = \frac{\ln(B(t,S) / B(t,T)K) + b^2 / 2}{b}$$

$$d2 = d1 - b$$

$$d1_V = \frac{\ln(V_t / B(t,T)D) - b_V^2 / 2 + \phi(t,T)}{b_V}$$

$$d2_V = d1_V - \rho b$$

$$b^2 = \int_t^T (\sigma_S - \sigma_T)^2 ds$$

$$b_V^2 = \int_t^T (\sigma_V - \sigma_T)^2 ds$$

$$\phi(t, T) = \int_t^T (\sigma_S - \sigma_T)(\sigma_V - \sigma_T) ds$$

$$\rho = \int_t^T [(\sigma_S - \sigma_T)(\sigma_V - \sigma_T) / b b_V] ds$$

以利率模型的 Merton 模型為例， $\sigma_T = \sigma(T - t)$

$$b^2 = \int_t^T [(S - s)\sigma - (T - s)\sigma]^2 ds = (S - T)^2 (T - t)\sigma^2$$

以利率模型的 Vasicek 模型而言， $\sigma_T = (1 - e^{-\alpha(T-t)})\sigma / \alpha$

$$b^2 = \int_t^T [(1 - e^{-\alpha(S-s)})\sigma / \alpha - (1 - e^{-\alpha(T-s)})\sigma / \alpha]^2 ds = (1 - e^{-\alpha(S-T)})^2 (1 - e^{-2\alpha(T-t)})\sigma^2 / 2\alpha^3$$

情況二：公司負債固定與回收率為到期公司價值除以公司負債

此情況下， $\delta = V_T / D$ 。根據遠期測度法，以 S 時到期的零息債券為標的資產，有違約風險 T 時到期歐式債券買權的評價方程式為

$$VBC_t = B(t, T) E_B \{ [Max(B(t, S) - K) 1_{\{V_T \geq D\}} + \frac{V_T}{D} Max(B(t, S) - K) 1_{\{V_T < D\}}] / B(T, T) \}$$

在 σ_T 為 t 與 T 的函數下，則債券價格服從常態分配，代入相關機率密度函數積分整理後可得

$$VBC_t = B(t, S) N(d1, d1_V; \rho) - KB(t, T) N(d2, d2_V; \rho) + \frac{B(t, S)V_t}{B(t, T)D} [e^{\phi(t, T)} N(d1 + \rho b_V \sqrt{T-t}, -d1_V - \rho b \sqrt{T-t}; -\rho) - KN(c1, -c2; -\rho)]$$

$$d1 = \frac{\ln(B(t, S) / B(t, T)K) + b^2 / 2}{b}$$

$$d2 = d1 - b$$

$$d1_V = \frac{\ln(V_t / B(t, T)D) - b_V^2 / 2 + \phi(t, T)}{b_V}$$

$$d2_V = d1_V - \rho b$$

$$c1 = d1 + \rho b_V + b$$

$$c2 = d1_V - \rho b + b_V$$

其餘同上一情況。

第四節 風險債券選擇權之評價

這一節介紹以風險債券為標的資產的選擇權之評價。而這裡的選擇權假設無倒帳風險。同上一節，這裡採用 Heath, Jarrow and Morton (1992)與 Klein (1996)的架構。假設發行債券的公司負債固定，且回收率為到期公司價值除以公司負債，亦即 $\delta = V_T / D$ 。根據遠期測度法，以 S 時到期的零息風險債券為標的資產，

無違約風險 T 時到期歐式債券買權的評價方程式為

$$RBC_t = B(t, T) E_B \{ [\text{Max}(B(t, S) - K) 1_{\{V_T \geq D\}} + \text{Max}(\frac{V_T}{D} - K) 1_{\{V_T < D\}}] / B(T, T) \}$$

在 σ_T 為 t 與 T 的函數下，則債券價格服從常態分配，代入相關機率密度函數積分整理後可得

$$RBC_t = B(t, S) N(d1, d1_v; \rho) - KB(t, T) N(d2, d2_v; \rho) + \frac{V_t}{B(t, T)D} [N(c1, -f1; -1) - \frac{K}{D} N(c2, -f2; -1)]$$

$$d1 = \frac{\ln(B(t, S) / B(t, T)K) + b^2 / 2}{b}$$

$$d2 = d1 - b$$

$$d1_v = \frac{\ln(V_t / B(t, T)D) - b_v^2 / 2 + \phi(t, T)}{b_v}$$

$$d2_v = d1_v - \rho b$$

$$c1 = \frac{\ln(V_t D / B(t, T)K) + b_v^2 / 2}{b_v}$$

$$c2 = c1 - b_v$$

$$f1 = \frac{\ln(V_t / B(t, T)D) + b_v^2 / 2}{b_v}$$

$$f2 = f1 - b_v$$